数学II講義ノート

2008年12月8日

Th.7.8

$A \in M(n,\mathbb{C}), \{\lambda_1,\ldots,\lambda_k\}$を，Aの相異なる固有値全体し，各$\lambda_k$の重複度を$\nu_i$とする． このとき，以下の条件は同値.
(1)Aは対角化可能
(2)$\dim E(\lambda_i) = \nu_i \ (i = 1.\ldots,k)$.

proof

$(1) \Rightarrow (2)$ 対角化可能であることの定義から，正則行列$Q \in M(n,\mathbb{C})$が存在して，$Q^{-1}AQ = diag(\underbrace{\lambda_1,\ldots,\lambda_1}_{\nu_1},\ldots,\underbrace{\lambda_k,\ldots,\lambda_k}_{\nu_k})$
これより，$AQ = Qdiag(a\lambda_1,\ldots,\lambda_1,\ldots,\lambda_k,\ldots,\lambda_k) \cdots (*)$
$Q = (\mathbf{q}_1,\ldots,\mathbf{q}_n),\ \mathbf{q}_i \in \mathbb{C}^n$と書く$(*)$より，

$$(A\mathbf{q}_1,\ldots,A\mathbf{q}_n) = (\lambda_1\mathbf{q}_1,\ldots,\lambda_1\mathbf{q}_{\nu_1},\ldots,\lambda_k\mathbf{q}_{n-\nu_k+1},\ldots,\lambda_k\mathbf{q}_n)\cdots(☆)$$

(☆)より，各λ_iに対して，ν_i個以上の線形独立な固有ベクトルが存在する．これより，$\dim E(\lambda_i) \geq \nu_i$
ところが, $\mathbb{C}^n = E(\lambda_1)\oplus\cdots\oplus E(\lambda_k) (Th7.6)$なので, $n = \dim \mathbb{C}^n = dimE(\lambda_1) + \dim E(\lambda_2) \oplus \cdots \oplus E(\lambda_k) = \cdots = \sum_i \dim E(\lambda_i) \geq \sum_i \nu_i = n$(固有多項式の次数)
不等号は等号でなければならない．$\Rightarrow \dim E(\lambda_i) = \nu_i$
$(2) \Rightarrow (1)$ Th.7.6より，$\mathbb{C}^n = E(\lambda_1)\oplus\cdots\oplus E(\lambda_k)$を示せばよい.
包含$\mathbb{C}^n \supset E(\lambda_1)\oplus\cdots\oplus E(\lambda_k)$は明らかなので，$dimE(\lambda_1)\oplus\cdots\oplus E(\lambda_k) = n$を示せばよい.

$$dimE(\lambda_1)\oplus\cdots\oplus dimE(\lambda_k) = dimE(\lambda_1)+\cdots+dimE(\lambda_k) = \cdots = \sum_i dimE(\lambda_i) = \sum_i \nu_i = n$$

となり，$\mathbb{C}^n = E(\lambda_1)\oplus\cdots\oplus E(\lambda_k)$

Def 7.9

V : 複素ベクトル空間, $T \in End(V)$ とする.
T が対角化可能
$\Leftrightarrow$ ある基底に関する T の表現行列が対角行列.
$\alpha \in \mathbb{C}$ に対して, $\quad E(\alpha) = E(\alpha; T) = \{\mathbf{v} \in V : T\mathbf{v} = \alpha\mathbf{v}\}$
$E(\alpha) \neq \{\mathbf{0}\}$ のとき, αを T の固有値という. このとき, $E(\alpha)$ のベクトルを固有値 α に対する T の固有ベクトルという.
T の固有多項式を $\Phi_T(x)$ とすれば, α が固有値 $\Leftrightarrow \Phi_T(\alpha) = 0$
α が T の固有値である時, α の $\Phi_T(x)$ における重複度を, α の重複度という.

Th7.10

V : 複素ベクトル空間, $T \in End(V), \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$: T の相異なる固有値とする.
このとき, 以下の条件は互いに同値
(1)T は対角化可能
(2)$V = E(\lambda_1; T) \oplus \cdots \oplus E(\lambda_k; T)$
(3)$dimE(\lambda_i; T) = \nu_i \ (i = 1, \ldots, k)$ ただし,ν_iは固有値λ_iの重複度.

proof

Th7.6 と Th7.8 の言い換えである.

Def7.11

V : ベクトル空間, $T \in End(V)$
V の部分空間 W が $T-$ 不変 $\Leftrightarrow T(W) \in W$
$\Leftrightarrow$T の定義域を W に制限したものは W の線形変換になる.

Th7.12

V : 複素ベクトル空間, $T \in End(V)$ とする
T が対角化可能 $\Leftrightarrow$ V の任意の $T-$ 不変部分空間 W に対して, 次の性質を充たす $T-$ 不変部分空間 W'が存在する;$V = W \oplus W'$

proof

$\Rightarrow$ の証明

T の相異なる固有値全体を $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ とする．W:T-不変部分空間とする．T は対角化可能なので，Th7.10 より，$V = E(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus E(\lambda_k)$

このとき，$W(\lambda_i) = W \cap E(\lambda_i)$ とする．

<u>**Step1**</u>　$W = W(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus W(\lambda_k)$ の証明

$W \supset W(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus W(\lambda_k)$ は明らかなので，$W \subset W(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus W(\lambda_k)$ を示す.

$\mathbf{w} \in W$ とする．直和分解 $V = E(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus E(\lambda_k)$ に応じて，

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 + \cdots + \mathbf{w}_k,\ \mathbf{w}_i \in E(\lambda_i)$$

と一意的に表すことができる.

各 $\mathbf{w}_i \in W$ を示せればよい.（そうすれば，$\mathbf{w}_i \in W \cap E(\lambda_i) = W(\lambda_i)$ ）

$\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 + \cdots + \mathbf{w}_k$ の両辺に T^l を作用させる.

$T^l \mathbf{w}_i = \lambda_i^l \mathbf{w}_i$ より，

$\lambda_1^l \mathbf{w}_1 + \cdots + \lambda_k^l \mathbf{w}_k = T^l \mathbf{w}\ (l \geq 0)$

$l = 0, 1, \ldots, k-1$ に対して上の式をまとめると，

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_k \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \ldots & \lambda_k^{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{w}_1 \\ \mathbf{w}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{w}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{w} \\ T\mathbf{w} \\ \vdots \\ T^{k-1}\mathbf{w} \end{pmatrix}$$

係数行列の行列式は vandermon の行列式なので $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$の差積.$\lambda_i \neq \lambda_j\ (i \neq j)$ より，係数行列の行列式 $\neq 0$ よって，係数行列は，正則係数行列の逆行列を $B = (b_{ij}) \in M(k, \mathbb{C})$ とすれば

$$\begin{pmatrix} \mathbf{w}_1 \\ \mathbf{w}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{w}_k \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \mathbf{w} \\ T\mathbf{w} \\ \vdots \\ T^{k-1}\mathbf{w} \end{pmatrix}$$

よって $\mathbf{w}_i = \sum_{j=0}^{k-1} b_{ij} T^j \mathbf{w}\ (i = 1, \ldots, k)$

これより，$\mathbf{w}_i \in \mathbb{C}\mathbf{w} + \mathbb{C}T\mathbf{w} + \cdots + \mathbb{C}T^{k-1}\mathbf{w} = \sum_{j=0}^{k-1} \mathbb{C}T^j \mathbf{w}$

W は T-不変なので，$T^l \mathbf{w} \in W (l \geq 0)$

したがって $\mathbf{w}_i \in \sum_{j=0}^{k-1} \mathbb{C} \underbrace{T^j \mathbf{w}}_{\in W} \subset W$.

以上から，$\mathbf{w}_i \in W(\lambda_i)$ となり，　$W = W(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus W(\lambda_k)$

Step2

$V = W \oplus W'$ となる W' の構成 $W(\lambda_i)$ は $E(\lambda_i;T)$ の部分空間なので，$E(\lambda_1;T)W = W(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus W(\lambda_k)$ を充たす $E(\lambda_i;T)$ の部分空間 $W'(\lambda_i)$ を選ぶ．このとき，$W' = W'(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus W'(\lambda_k)$ と定める．$E(\lambda_i;T)$ 上で，T は λ_i 倍写像:

$\mathbf{x} \in E(\lambda_i;T) \Rightarrow T\mathbf{x} = \lambda_i \mathbf{x}$ これより，$W'(\lambda_i)$ は T-不変．したがって，W' も T-不変.

$W \oplus W' = W(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus W(\lambda_k) \oplus W'(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus W'(\lambda_k)$

$= (W(\lambda_1) \oplus W'(\lambda_1)) \oplus \cdots \oplus (W(\lambda_k) \oplus W'(\lambda_k))$

$= E(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus E(\lambda_k)$

$= V$

$\Leftarrow$ の証明　dimV に関する帰納法で示す．dimV=1 のとき明らか.

dimV ¡n のとき主張は正しいと仮定し， dimV=n のとき $\leftarrow$ を示す.

$\alpha \in \mathbb{C}$ を T の固有値とする．$\mathfrak{Ker}(\alpha I_v - T) \neq \{\not\mathbb{F}\}$ （$I_v : V$ の恒等変換）より，αに対する固有ベクトル $\mathbb{P}$ が存在する.

このとき，一次元部分空間 $\mathbb{C}_{\mathbb{P}}$ は T-不変．条件より，

$V = \mathbb{C}_{\mathbb{P}} \oplus W$ となる T-不変部分空間 W が存在する.

・W に対して，以下の条件を仮定する（あとで示す）

(∗)T の定義域を W に制限した W の線形変換を T_W と書く．W の任意の T_w-不変部分空間 U に対して，W の T_W-不変部分空間 U' であって，$W = U \oplus U'$ を充たすものが存在する.

条件 (∗) と，$dimW < n$ から，帰納法の仮定により，T_W は対角化可能.

つまり，T_W の固有ベクトルから成る W の基底 $\{\mathbb{P}_2, \ldots, \mathbb{P}\}_n$ が存在する.

$T_W \mathbb{P}_i = \alpha_i \mathbb{P}_i (i = 2, \ldots, n)$

このとき，$V = \mathbb{C}_{\mathbb{P}}$ なので，$\mathbb{P}, \mathbb{P}_2, \ldots, \mathbb{P}_n$ は V の基底であり，この基底に関する T の表現行列は $\begin{pmatrix} \alpha & & & 0 \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \alpha_n \end{pmatrix}$ である.